

# PRÉDICTION DE LA DUCTILITÉ EN COURBURE DES POUTRES EN BÉTON À HAUTE RÉSISTANCE SELON L'EUROCODE 2

## CURVATURE DUCTILITY PREDICTION OF HIGH STRENGTH CONCRETE BEAMS ACCORDING TO EUROCODE 2

HAYTHAM BOUZID<sup>1</sup>, AMAR KASSOUL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Université Hassiba Benbouali, Chlef, Algérie

<sup>2</sup>Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Université Hassiba Benbouali, Chlef, Algérie

### RÉSUMÉ

L'objectif de cette étude est la prédiction d'une nouvelle approche pour l'évaluation du facteur de ductilité en courbure des poutres en béton à haute résistance (BHP) dimensionnée selon l'Eurocode 2. Après l'exposé des lois de comportement des matériaux et la méthode d'évaluation selon l'Eurocode 2, on réalise une étude paramétrique sur les facteurs influençant la ductilité en courbure des sections fléchies. Le lissage des résultats obtenus a permis de prédire une approche très simple pour l'estimation de la ductilité. La formule proposée permet d'estimer le facteur de ductilité en courbure des poutres en BHP directement en fonction de la résistance du béton, la limite élastique des aciers et le pourcentage des armatures tendues et comprimées. La formule proposée est validée par des résultats théoriques et expérimentaux de différents chercheurs.

**Mots clés :** Eurocode 2, Poutres, Armatures, Ductilité en courbure, Béton à haute résistance.

### ABSTRACT

The objective of this study is the prediction of a new approach to evaluate the curvature ductility factor of high strength concrete beams according to Eurocode 2. After the presentation of the constitutive laws of materials and the evaluation method of curvature ductility according to the Eurocode 2, we conduct a parametric study on the factors influencing the curvature ductility of inflected sections. The calibrating of the obtained results allows predicting a very simple approach for estimating the curvature ductility factor. The proposed formula allows to calculate the curvature ductility factor of high strength concrete beams directly according to the concrete strength  $f_{ck}$ , the yield strength of steel  $f_{yk}$  and the ratio of tension and compression reinforcements  $\rho$  and  $\rho'$  respectively. The proposed formula is validated by theoretical and experimental results of different researchers.

**Keywords:** Eurocode 2, Beams, Reinforcement, Curvature ductility, High strength concrete.

## 1. INTRODUCTION

Le progrès connu dans la réalisation des bâtiments tours en béton armé ces dernières années a nécessité l'utilisation de matériaux avec des résistances très élevées afin de diminuer les dimensions de section transversales des éléments structuraux et d'améliorer leur résistance ainsi que leur ductilité. Ceci nécessite inévitablement l'emploi d'un béton de haute résistance (BHP) à la compression. L'augmentation de cette résistance s'accompagne fréquemment avec l'amélioration d'autres propriétés comme la résistance à la traction, la rigidité et la résistance à l'usure ainsi que la durabilité. Dans ce contexte, plusieurs codes tolèrent l'utilisation de la résistance du béton jusqu'à 90 MPa et plus [1].

Actuellement, plusieurs investigations expérimentales et analytiques ont été menées sur l'étude du comportement non linéaire des constructions en béton armé avec des matériaux de haute résistance où l'étude de la ductilité locale des éléments structuraux poteaux et poutres ont pris une large part dans la préoccupation des chercheurs. L'une des caractéristiques des structures dissipatives d'énergie en zone de forte sismicité est de favoriser l'apparition des rotules plastiques dans les poutres plutôt que les poteaux. D'ici, vient l'importance de l'étude de la ductilité locale des poutres en béton où des codes parasismiques exigent leur vérification durant le dimensionnement [2].

Plusieurs études ont été conduites dans ce domaine, Pam et al. [3] [4] ont proposé deux formules pour l'estimation du facteur de ductilité en courbure des poutres en béton à haute résistance : la première étude était basée sur des résultats expérimentaux et la deuxième sur des résultats théoriques. Dans ces deux recherches, le rapport de balancement des armatures tendues adopté par le code ACI [5] est considéré. Dans une autre investigation, Kwan et al. [6] ont proposé une modification de la formule proposée par Pam et al. [4]. Bengar et al. [7], Maghsoudi et al. [8] ont mené des tests expérimentaux sur des séries de poutres où ces résultats sont confrontés à des résultats théoriques d'ACI [5] et CSA [9]. Arslan et al. [10] ont développé une autre approche simplifiée basé sur la variation de la résistance du béton jusqu'à 110 MPa. Récemment, Lee [11] a proposé une nouvelle approche très améliorée pour l'évaluation du facteur de ductilité en courbure pour les poutres en béton à haute résistance en tenant compte des mêmes paramètres utilisés par les différents chercheurs cités précédemment.

Malgré que ces chercheurs aient utilisé des lois de comportement de matériaux différentes, la considération de base de ces travaux est la prise en compte du coefficient de balancement adopté par le code ACI [4] comme un élément de base. Ce qui ne permet pas leur utilisation pour l'emploi de l'Eurocode 2 [1]. Il est connu que l'Eurocode 8 [2]

accorde une importance particulière à la prise en compte de la ductilité locale durant le dimensionnement des éléments structuraux en exigeant le respect d'un facteur de ductilité en courbure admissible. Dans ce contexte, vient l'importance primordiale d'avoir une relation simplifiée qui permet de vérifier rapidement la condition de ductilité locale selon l'Eurocode 8 [2], et qui tient compte des paramètres explicite en concordance avec l'Eurocode 2 [2].

L'objectif principal de cet article est l'élaboration d'une relation simplifiée pour l'estimation du facteur de ductilité en courbure en tenant compte des principales caractéristiques de l'Eurocode 2 [1] en particulier les lois de comportement des matériaux acier et béton.

## 2. LOIS DE COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX

### 2.1. Béton

Selon l'Eurocode 2 [1], la résistance caractéristique à la compression du béton  $f_{ck}$  à 28 jours est limitée sur une éprouvette cylindrique à 90 MPa et à 105 MPa sur une éprouvette cubique, pour le béton à haute résistance. La valeur de calcul de la résistance en compression du béton  $f_{cd}$  est exprimée par :

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{\gamma_c} \quad (1)$$

Où  $\gamma_c$  est le facteur partiel de sécurité pour le béton, égal à 1.5 pour les situations durables et à 1.2 pour les situations accidentelles.  $\alpha_{cc}$  est un coefficient tenant compte des effets à long terme sur la résistance à la compression du béton; sa valeur varie entre 0.8 et 1.

Pour le dimensionnement, on utilise le diagramme contrainte-déformation (Fig. 1) caractérisé par les relations des contraintes et des déformations suivantes :

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{pour } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{pour } \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu2} \end{cases} \quad (2)$$

Où  $\varepsilon_c$  est la déformation résultant de la compression du béton et  $\varepsilon_{c2}$  est la déformation de compression du béton sous la contrainte maximale  $f_{cd}$ . Elle est exprimée par :

$$\varepsilon_{c2}(\%) = \begin{cases} 2 & \text{pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2.0 + 0.085(f_{ck} - 50)^{0.53} & \text{pour } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3)$$

$\varepsilon_{cu2}$  est la déformation de compression ultime du béton, définie par :

$$\varepsilon_{cu2}(\%) = \begin{cases} 3.5 & \text{pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2.6 + 35 \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 & \text{pour } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4)$$

$n$  : est un exposant qui prend les valeurs suivantes :

$$n = \begin{cases} 2 & \text{pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.4 + 23.4 \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 & \text{pour } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (5)$$

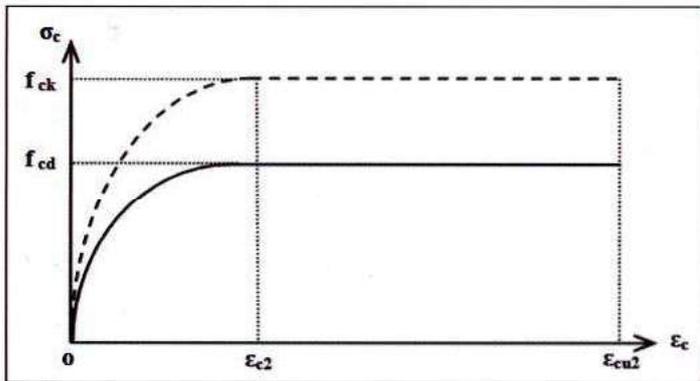


Fig. 1. Diagramme parabole rectangle pour le béton non confiné sous compression [1].

Fig. 1. Parabola-rectangle diagram for unconfined concrete under compression [1].

## 2.2. Acier

Selon l'Eurocode 2 [1], la conception des sections en béton armé est effectuée à partir d'une classe spécifiée d'armature représentée par la valeur caractéristique de la limite d'élasticité  $f_{yk}$ . Les valeurs de  $f_{yk}$  varient sur une gamme de 400 à 600 MPa.

Le diagramme contrainte-déformation des aciers (Fig. 2) se distingue par la courbe élasto-plastique bilinéaire. Il est caractérisé par une branche inclinée jusqu'à une déformation égale à  $(f_{yd}/E_s)$  et une contrainte de l'armature égale à  $f_{yd}$ , ainsi qu'une branche supérieure supposée horizontale jusqu'à la déformation maximale  $\varepsilon_{uk}$  correspondant à la contrainte dans l'armature égale à  $f_{yd}$  où :

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (6)$$

Où  $\gamma_s$  est un coefficient partiel de l'acier égal à 1.15 pour les situations durables et 1 pour les situations accidentelles.

$\varepsilon_{syd} = f_{yd}/E_s$  : allongement élastique de l'armature sous charge maximale ;

$E_s$  : module d'élasticité de l'acier, égal à 200000 MPa ;

$\varepsilon_{uk}$  : allongement ultime de l'armature sous charge maximale, cette déformation ultime est limitée à 5% pour la classe B et 7.5% pour la classe C. La valeur recommandée pour  $\varepsilon_{ud}$  est  $0.9\varepsilon_{uk}$ .

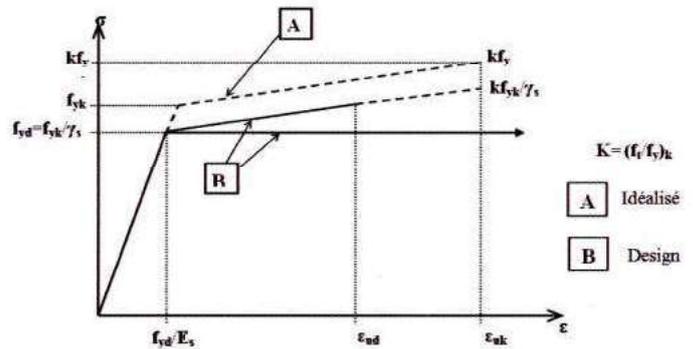


Fig. 2. Diagramme «contrainte-déformation» des aciers du béton armé [1].

Fig. 2. stress-strain diagram for reinforcing steel [1].

## 3. MÉTHODE D'ÉVALUATION DU FACTEUR DE DUCTILITÉ EN COURBURE

L'analyse du comportement non linéaire d'une section transversale d'une poutre dissipative en flexion simple nécessite le plus souvent une étude aux états limites [12]. La procédure d'évaluation du facteur de ductilité en courbure est adaptée selon les recommandations de l'Eurocode 2 [1] [13].

### 3.1. Courbure à la fin de la phase élastique

L'utilisation de l'état limite de service est conditionnée par les contraintes limites dans le béton et les armatures. Afin d'éviter des fissures longitudinales et des microfissures,

la contrainte de compression dans le béton sera limitée à  $k_1 f_{ck}$  ( $f_{cd} \leq k_1 f_{ck}$ ), généralement  $k_1 = 0.6$  [1]. Concernant les armatures, afin d'éloigner les déformations inélastiques, les fissures et les déformations inacceptables, les contraintes de traction seront limitées à  $k_3 f_{yk}$  ( $f_{yd} \leq k_3 f_{yk}$ ), dans notre cas  $k_3 = 0.8$  [1].

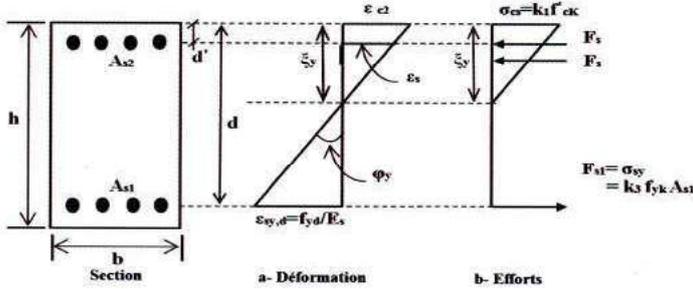


Fig. 3. Comportement d'une section fléchie d'une poutre en béton armé à l'état limite de service (fin de la phase élastique)

Fig. 3. Behavior of reinforced concrete beam section in flexure at the serviceability limit state (end of the elastic phase).

La Figure 3 représente une section transversale d'une poutre en béton armé doublement armée à l'état limite de service où  $\xi_y$  désigne le facteur de la hauteur de la zone comprimée à l'état élastique,  $d$  la hauteur utile de la section et  $d'$  la hauteur de l'enrobage dans la zone comprimée. D'après la Figure 3(a), la courbure à la fin de la phase élastique est exprimée par :

$$\varphi_y = \frac{\epsilon_{sy,d}}{d(1-\xi_y)} \quad (7)$$

et la déformation dans les armatures comprimées  $\epsilon_{s2}$  s'écrit :

$$\epsilon_{s2} = \frac{(\xi_y d - d') k_3 f_{yk}}{d(1-\xi_y) E_s} \quad (8)$$

Sachant que la contrainte dans les armatures comprimées  $\sigma_{s2} = \epsilon_{s2} E_s$ , l'équation d'équilibre statique des efforts internes sollicitant la section (Fig. 3(b)), s'écrit :

$$\frac{1}{2} \xi_y d b k_1 f_{ck} + \frac{(\xi_y d - d')}{d(1-\xi_y)} k_3 f_{yk} A_{s2} = \sigma_{sy} A_{s1} \quad (9)$$

La solution de cette équation conduit à un polynôme du second degré en fonction de la variable  $\xi_y$  dont la solution acceptable retenue est :

$$\xi_y = \left( \frac{1}{2} + \frac{k_3 f_{yk}}{k_1 f_{ck}} (\rho + \rho') \right) - \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{k_3 f_{yk}}{k_1 f_{ck}} (\rho + \rho') \right)^2 - \frac{2 k_3 f_{yk}}{k_1 f_{ck}} \left( \rho + \frac{d'}{d} \rho' \right)} \quad (10)$$

Où  $\rho = A_{s1}/bd$  est le pourcentage d'armatures tendues et  $\rho' = A_{s2}/bd$  est le pourcentage d'armatures comprimées.

On détermine  $\epsilon_{s2}$  exprimé par Eq. (8) : si  $\epsilon_{s2} \leq f_{yk}/E_s$ , on retient la valeur de  $\xi_y$  obtenue par Eq. (10). Dans le cas contraire, les armatures comprimées  $A_{s2}$  sont plastifiées en compression et dans ce cas Eq. (9), devient :

$$\frac{1}{2} \xi_y d b k_1 f_{ck} + k_3 f_{yk} A_{s2} = k_3 f_{yk} A_{s1} \quad (11)$$

Donc, il est évident que :

$$\xi_y = \frac{2 k_3 f_{yk}}{k_1 f_{ck}} (\rho - \rho') \quad (12)$$

### 3.2. Courbure à l'état limite ultime

À l'état limite ultime, plusieurs considérations préconisées par l'Eurocode 2 sont prises en compte à savoir : la section reste plane après la déformation, le béton tendu est négligé, les contraintes dans le béton et les armatures sont déterminées par Eq. (1) et Eq. (6), les déformations sont limitées à  $\epsilon_{cu2}$  dans le béton comprimé et à  $\epsilon_{ud}$  dans les armatures tendues.

La Figure 4 illustre le comportement d'une section transversale la plus défavorable d'une zone critique d'une poutre en béton armé, où  $\xi_u$  représente le facteur de la hauteur de la zone comprimée.

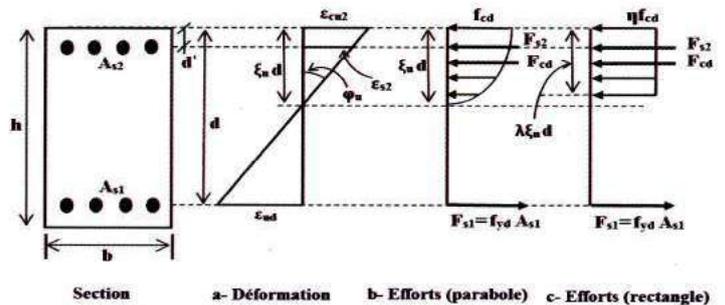


Fig. 4. Comportement de la section d'une poutre fléchie en béton armé à l'état limite ultime.

Fig. 4. Behavior of reinforced concrete beam section in flexure at the ultimate limit state.

D'après la Figure 4 (a), la courbure à l'état limite ultime est exprimée par :

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_{cu2}}{\xi_u d} \quad (13)$$

Supposons que les armatures comprimées  $A_{s2}$  restent à l'état élastique, leur déformation  $\varepsilon_{s2}$  s'obtient comme suit :

$$\varepsilon_{s2} = \frac{(\xi_u d - d')}{\xi_u d} \varepsilon_{cu2} \quad (14)$$

Sachant que la contrainte dans les armatures comprimées  $\sigma_{s2} = \varepsilon_{s2} E_s$ , l'équation d'équilibre des efforts internes de compression et de traction, s'écrit :

$$\lambda \xi_u db \eta f_{cd} + \frac{(\xi_u d - d')}{\xi_u d} \varepsilon_{cu2} E_s A_{s2} = f_{yd} A_{s1} \quad (15)$$

Où  $\lambda$  est le facteur de la hauteur effective de la zone comprimée (Fig. 4(c)). D'après l'Eurocode 2 [1], il s'exprime par :

$$\lambda = \begin{cases} 0.8 & \text{pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} & \text{pour } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (16)$$

$\eta$  est le facteur de la résistance effective du béton (Fig. 4 (c)). D'après l'Eurocode 2 [1], il s'exprime par :

$$\eta = \begin{cases} 1.0 & \text{pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.0 - \frac{f_{ck} - 50}{200} & \text{pour } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (17)$$

La solution de l'Eq. (15) conduit à une expression du second degré variant en fonction de  $\xi_u$  dont la solution acceptable s'écrit comme suit :

$$\xi_u = \frac{(f_{yd} \rho - \varepsilon_{cu2} E_s \rho')}{2 \lambda \eta f_{cd}} + \frac{\sqrt{(f_{yd} \rho - \varepsilon_{cu2} E_s \rho')^2 + 4 \lambda \eta f_{cd} \varepsilon_{cu2} E_s \rho' \frac{d'}{d}}}{2 \lambda \eta f_{cd}} \quad (18)$$

### 3.3. Facteur de ductilité conventionnelle en courbure

Le facteur de ductilité en courbure s'obtient par le rapport de la courbure à l'état ultime déterminée en Eq. (13) et la courbure à la fin de la phase élastique déterminée en Eq. (7) :

$$\mu_\varphi = \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{sy,d}} \frac{(1 - \xi_y)}{\xi_u} \quad (19)$$

## 4. ETUDE PARAMÉTRIQUE

Cette étude sera articulée autour des paramètres influençant la section d'une poutre en béton armé. Ces paramètres se divisent, selon leurs influences, en deux catégories. La première influe l'élément de la poutre globale, à savoir : la résistance à la compression du béton  $f_{ck}$  et la limite élastique des armatures  $f_{yk}$ . La deuxième catégorie influe l'axe neutre de chaque section de la poutre en béton armé, ces paramètres concernent particulièrement les pourcentages des armatures tendues et comprimées  $\rho$  et  $\rho'$ . Dans cette étude, on commence d'abord par les paramètres  $f_{ck}$  et  $f_{yk}$  afin de mieux cerner leurs effets sur le facteur de ductilité en courbure  $\mu_\varphi$  de la poutre globale. Ensuite, dans un second temps on essaye de voir l'effet des pourcentages  $\rho$  et  $\rho'$  sur  $\mu_\varphi$  selon la variation de l'axe neutre de la poutre.

### 4.1 Effet de la résistance du béton $f_{ck}$

Afin d'examiner l'effet du béton à haute résistance sur la ductilité en courbure, on essaye d'utiliser des résistances  $f_{ck}$  jusqu'à 50 MPa pour le béton ordinaire et des résistances élevées jusqu'à 90 MPa pour le béton à haute résistance comme le prévoit l'Eurocode 2. La Figure 5 (a) illustre le facteur de ductilité en courbure  $\mu_\varphi$  correspondant aux différentes valeurs de la résistance de béton  $f_{ck}$  pour un pourcentage d'armatures tendues  $\rho = 0.5\%$ . D'après cette histogramme, on observe que le facteur  $\mu_\varphi$  augmente avec l'augmentation de  $f_{ck}$  jusqu'à 50 MPa où le facteur de ductilité en courbure atteint sa valeur maximale. Au-delà de cette résistance,  $\mu_\varphi$  diminue avec une petite variation où les barres de l'histogramme sont presque au même niveau et deviennent presque constantes jusqu'à  $f_{ck} = 90$  MPa. Ce constat est observé dans les Figures 5 (b) et (c) quand  $\rho = 1.0\%$  et  $1.5\%$  respectivement. En conséquence, on peut déduire que le facteur de ductilité en courbure cesse de s'améliorer avec l'augmentation de la résistance à la compression du béton au-delà de 50 MPa.

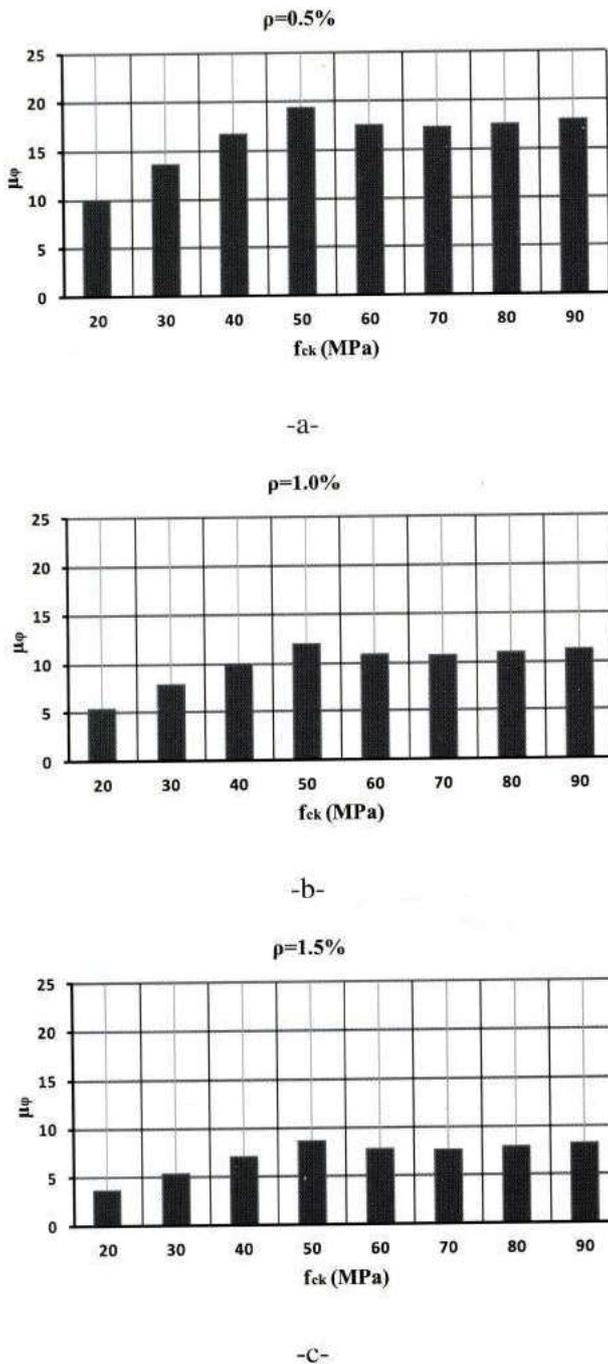


Fig. 5. Effet de la résistance du béton sur la ductilité en courbure pour ( $f_{yk} = 400$  MPa;  $\rho / \rho = 1/2$ ).

Fig. 5. Effect of the concrete compressive strength  $f_{ck}$  on the curvature ductility for ( $f_{yk} = 400$  MPa;  $\rho / \rho = 1/2$ ).

#### 4.2 Effet de la limite élastique des aciers $f_{yk}$

Respectant le domaine d'application de la limite élastique  $f_{yk}$  de l'Eurocode 2, trois valeurs de  $f_{yk}$  sont considérées, à savoir : 400, 500 et 600 MPa. Les résultats de l'analyse numérique sont présentés sur la Figure 6. Cette figure illustre le facteur de ductilité en courbure  $\mu_\phi$  pour les trois valeurs de la limite élastique  $f_{yk}$  considérées avec une valeur constante

du pourcentage d'armatures tendues  $\rho = 0.5\%$ , et trois valeurs de  $f_{ck}$  (20, 60 et 90 MPa). D'après l'histogramme (Fig. 6(a)), on observe que le facteur de ductilité  $\mu_\phi$  diminue avec l'augmentation de la limite élastique  $f_{yk}$  de 400 à 600 MPa. Ce constat est clairement observé dans la Figure 6(b,c) quand la résistance de béton  $f_{ck}$  est égale à 60 et 90 MPa respectivement. Contrairement au constat déduit en (4.1), le facteur de ductilité en courbure est inversement proportionnel avec la limite élastique des aciers  $f_{yk}$ .

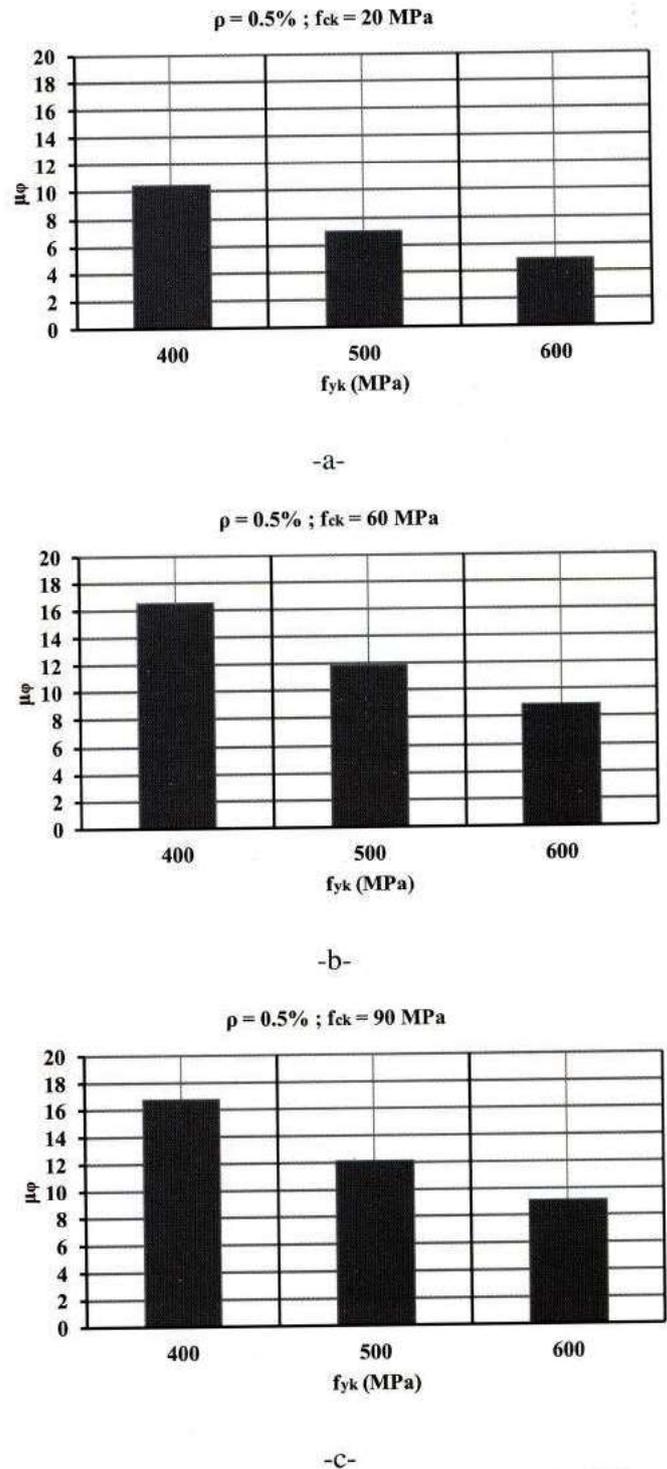
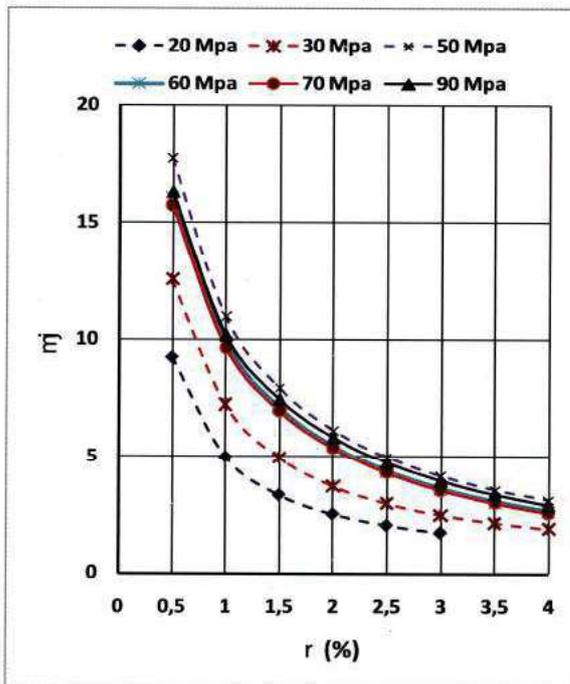


Fig. 6. Effet de la limite élastique des aciers sur la ductilité en courbure pour ( $\rho / \rho = 3/4$ ).

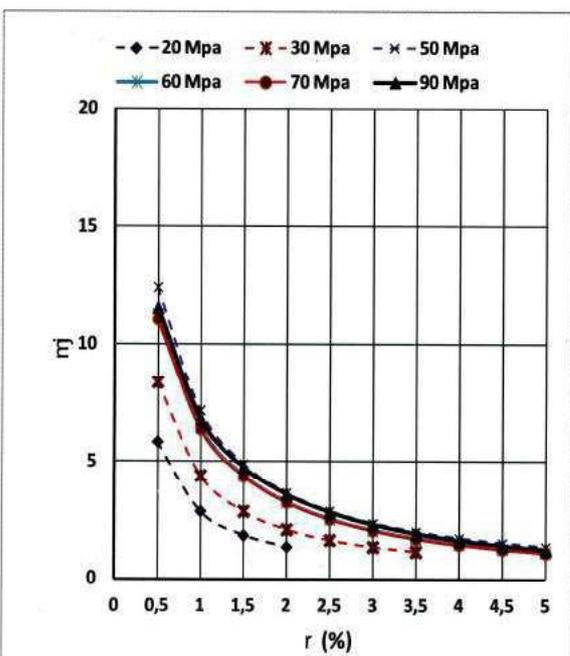
Fig. 6. Effect of the yield strength of steel  $f_{yk}$  on the curvature ductility for ( $\rho / \rho = 3/4$ ).

### 4.3. Effet du pourcentage des armatures tendues $\rho$

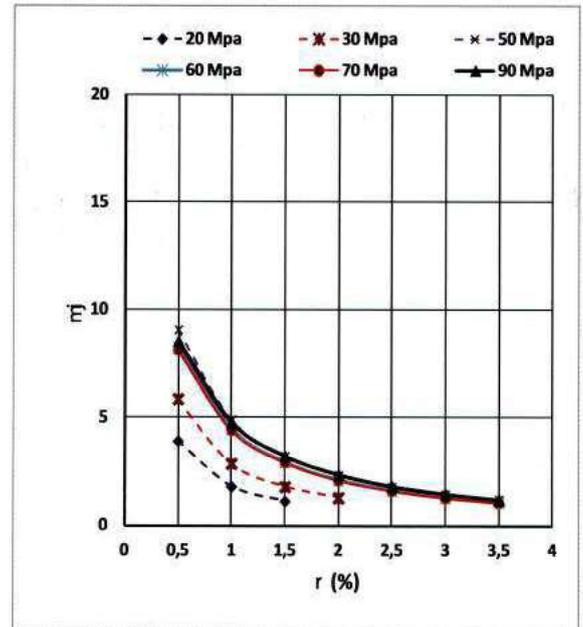
L'effet du pourcentage des armatures tendues  $\rho$  sur le facteur de ductilité en courbure est traité avec l'accroissement de la résistance à la compression du béton  $f_{ck}$  de 20 MPa à 90 MPa. Le pourcentage  $\rho$  varie de 0.5% à 5% avec un pas de 0.5%. La Figure 7(a) montre les courbes  $\mu_{\varphi}(\rho)$  pour chaque valeur de  $f_{ck}$ . D'après cette figure, on constate que chaque courbe  $\mu_{\varphi}(\rho)$  est inversement proportionnelle avec l'augmentation de  $\rho$ . Les mêmes allures que la Figure 7(a) sont observées pour la Figure 7(b) et (c) avec  $f_{yk} = 500$  MPa et 600 MPa. En conséquence, la ductilité en courbure  $\mu_{\varphi}$  diminue proportionnellement avec l'augmentation du rapport  $\rho$ .



a)  $f_{yk} = 400$  MPa,  $\rho'/\rho = 1/2$



b)  $f_{yk} = 500$  MPa,  $\rho'/\rho = 1/2$



c)  $f_{yk} = 600$  MPa,  $\rho'/\rho = 1/2$

Fig. 7. Effet du rapport des armatures tendues  $\rho$  sur la ductilité en courbure.

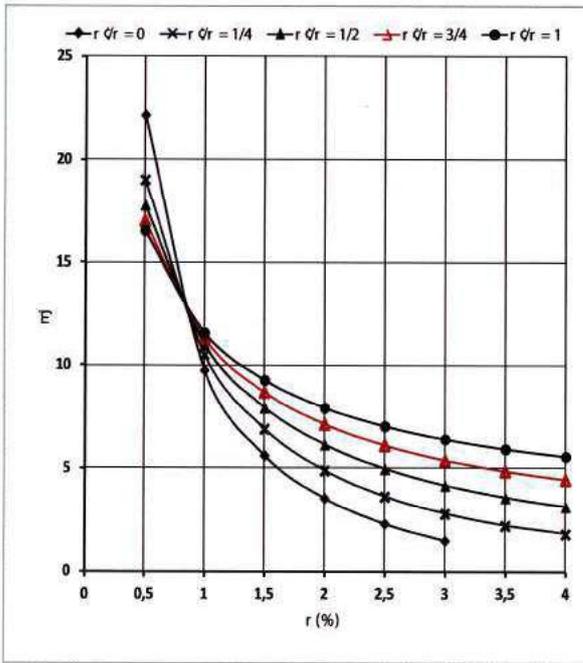
Fig. 7. Effect of the percentage of tension reinforcement  $\rho$  on the curvature ductility.

### 4.4. Effet du pourcentage des armatures comprimées $\rho'$

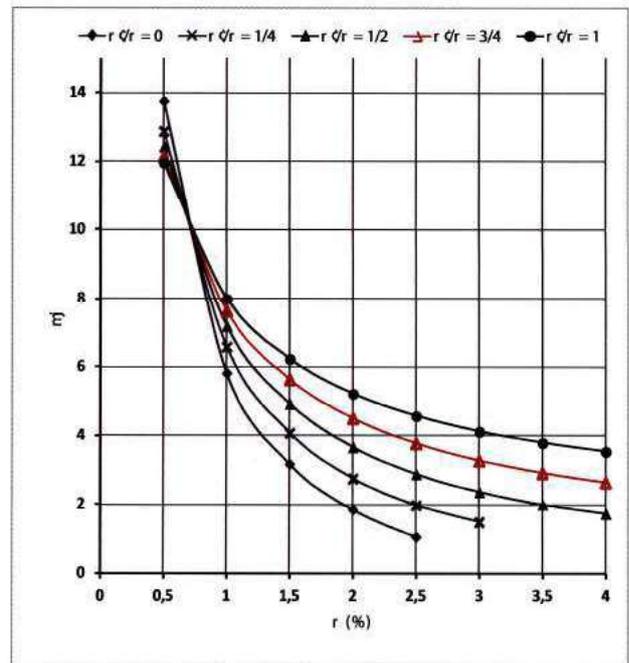
Dans cette étude le pourcentage des armatures comprimées  $\rho$  varie en fonction du rapport  $\rho'/\rho$ , de 0 à 1. Les résultats obtenus sont illustrés sur les Figures 8, 9 et 10. La figure 8(a) montre les courbes  $\mu_{\varphi}(\rho)$  pour une résistance de béton égale à 50 MPa et une limite élastique égale à 400 MPa. D'après cette figure, trois intervalles de variation sont observés :

- Pour  $\rho < 0.8\%$ , on constate que les courbes  $\mu_{\varphi}(\rho)$  diminuent avec l'augmentation de  $\rho'/\rho$ ;
- Pour  $\rho = 0.8\%$ , l'effet des armatures comprimées est négligeable : toutes les courbes coïncident entre elles quelque soit la valeur du rapport  $\rho'$ ;
- Pour  $\rho > 0.8\%$ , on constate que l'effet de  $\rho'/\rho$  devient très avantageux, et les courbes  $\mu_{\varphi}(\rho)$  augmentent avec l'augmentation de  $\rho'/\rho$ .

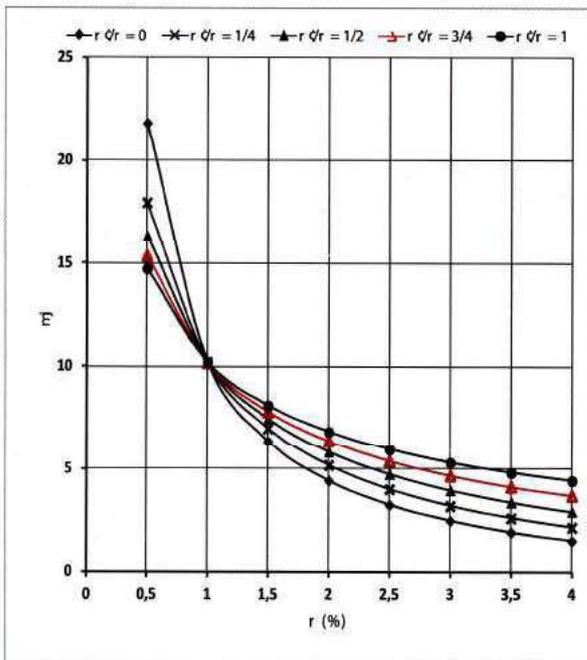
Ce même constat est illustré dans la Fig. 8(b) quand la résistance du béton  $f_{ck}$  augmente à 90 MPa avec une légère modification du point de coïncidence. Concernant les Figures 9 et 10, avec  $f_{yk}$  égale à 500 et 600 MPa respectivement, les mêmes remarques sont notées.



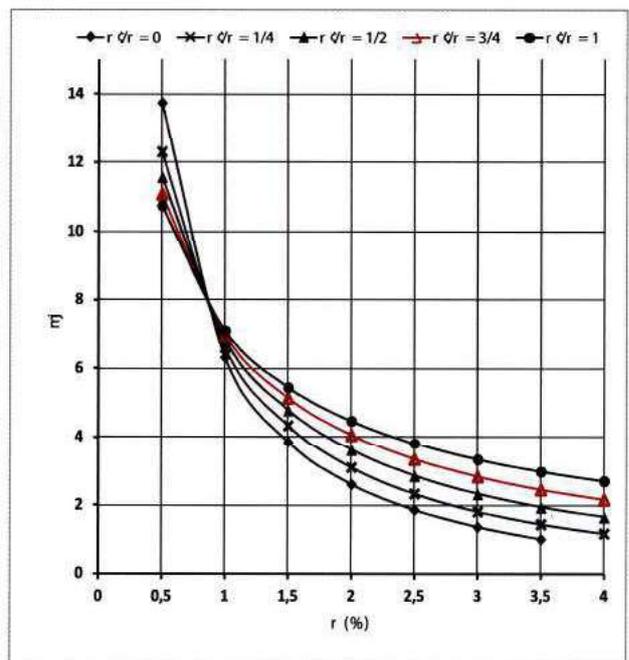
a)  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$



a)  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$



b)  $f_{ck} = 90 \text{ MPa}$



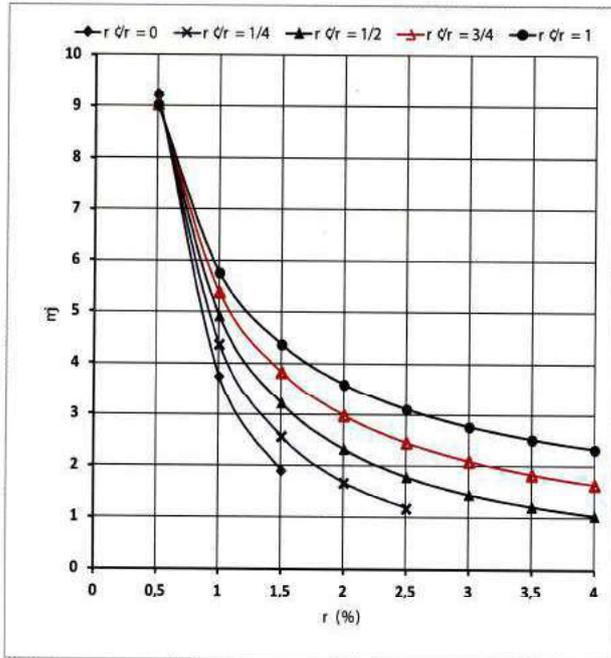
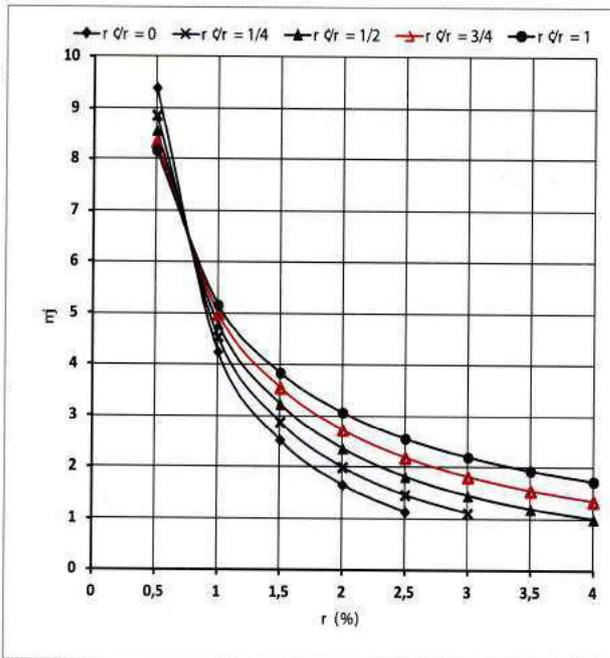
b)  $f_{ck} = 90 \text{ MPa}$

Fig. 8. Effet du rapport des armatures comprimées  $\rho'$  sur la ductilité en courbure ( $f_{yk} = 400 \text{ MPa}$ ).

Fig. 8. Effect of the ratio of compression reinforcement  $\rho'$  on the curvature ductility for ( $f_{yk} = 400 \text{ MPa}$ ).

Fig. 9. Effet du rapport des armatures comprimées  $\rho'$  sur la ductilité en courbure ( $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ).

Fig. 9. Effect of the ratio of compression reinforcement  $\rho'$  on the curvature ductility for ( $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ).

a)  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$ b)  $f_{ck} = 90 \text{ MPa}$ 

**Fig. 10. Effet du rapport des armatures comprimées  $\rho'$  sur la ductilité en courbure ( $f_{yk} = 600 \text{ MPa}$ ).**

**Fig. 10. Effect of the ratio of compression reinforcement  $\rho'$  on the curvature ductility for ( $f_{yk} = 600 \text{ MPa}$ ).**

## 5. FORMULE PROPOSÉE

L'étude de l'influence des différents paramètres affectant le facteur de ductilité en courbure a montré que ce facteur peut être représenté comme une fonction de :

$$\mu_{\varphi} = f(f_{ck}, \rho, (\rho'/\rho), f_{yk}) \quad (20)$$

D'après les différentes courbes tracées en fonction du pourcentage des armatures tendues  $\rho$ ,  $\mu_{\varphi}$  peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\mu_{\varphi} = A\rho^B \quad (21)$$

où A et B sont des coefficients qui seront déterminés en fonction des paramètres étudiés précédemment ( $f_{ck}$ ,  $\rho$ ,  $\rho'/\rho$  et  $f_{yk}$ ). La première proposition sera pour la détermination du facteur de ductilité en courbure des sections des poutres en béton ordinaire où la résistance du béton est inférieure ou égale à 50 MPa, et la deuxième sera pour une résistance supérieure à 50 MPa.

### 5.1. Pour $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$

La formule simplifiée proposée est valable pour  $30 \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ,  $1 \leq \rho \leq 5 \%$ ,  $0,25 \leq \rho'/\rho \leq 1$  et  $400 \leq f_{yk} \leq 600 \text{ MPa}$ . Elle répond largement aux conditions pratiques des poutres. Le coefficient A de l'Eq. (21), peut être exprimé comme suit :

$$A = f(f_{ck}, (\rho'/\rho), f_{yk}) \quad (22)$$

ou bien :

$$A = \alpha(f_{ck}) * \beta(f_{yk}) * \gamma(\rho'/\rho) \quad (23)$$

Sur la base de l'étude paramétrique, et d'après plusieurs opérations numériques sur des différents cas de  $f_{ck}$  allant de 30 jusqu'à 50 MPa, le calibrage des résultats obtenus a permis d'écrire la formulation de A et B comme suit :

$$A = 2080 * f_{ck} * f_{yk}^{-2.226} * (44\rho(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{1}{2}) + 1) \quad (24)$$

et

$$B = -0.94 \quad (25)$$

## 5.2. Pour $f_{ck} > 50$ MPa

Pour des valeurs de la résistance du béton  $f_{ck}$  allant de 51 MPa à 90 MPa correspondant au béton à haute résistance et après lissage des différentes courbes illustrées dans l'étude paramétrique, les coefficients **A** et **B** de l'Eq. (21) peuvent être ajustés de la manière suivante :

$$A = \left( \frac{132997,261}{-0.0003f_{ck}^2 + 0.0476f_{ck} - 0.367} \right) * \left( 36\rho \left( \frac{\rho'}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\rho'}{2} - \frac{7}{2} \right) \right) * f_{yk}^{-2,268} \quad (26)$$

et :

$$B = -0.93 \quad (27)$$

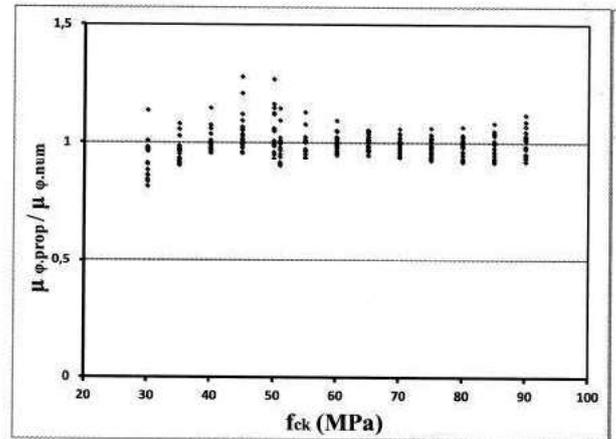
## 6. VALIDATION DE LA FORMULE PROPOSÉE

La formule proposée pour le calcul du facteur de la ductilité en courbure  $\mu_\phi$  dans Eq. (21) est comparée d'abord avec les résultats numériques obtenus dans l'étude paramétrique selon l'Eurocode 2 [1]. Ensuite, elle sera confrontée avec les résultats théoriques de Pam et *al.* [3], Arslan et *al.* [10] et Lee [11] ainsi qu'avec les résultats expérimentaux de Maghsoudi et *al.* [8], Bengar et *al.* [7].

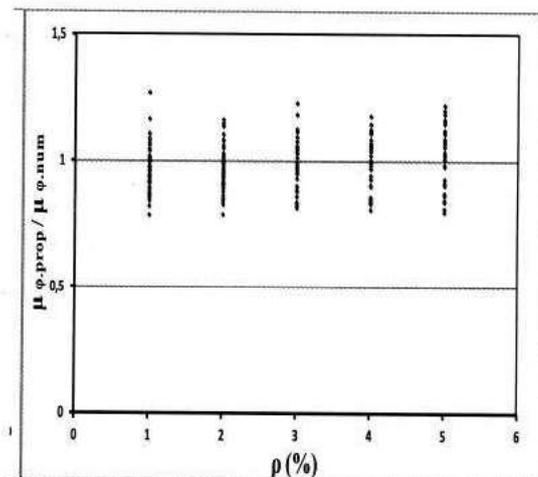
La Figure 11 présente le rapport d'erreur ( $\mu_{\phi,proposée} / \mu_{\phi,numérique}$ ) entre les valeurs du facteur de la ductilité en courbure obtenues par Eq. (21) ( $\mu_{\phi,prop}$ ) et les résultats numériques de l'Eurocode 2 ( $\mu_{\phi,num}$ ). Cette Figure se divise en quatre diagrammes a, b, c et d suivant le changement des paramètres  $f_{ck}$ ,  $f_{yk}$ ,  $\rho$  et  $\rho'/\rho$  respectivement. La Figure 11(a) montre le rapport ( $\mu_{\phi,prop} / \mu_{\phi,num}$ ) en fonction de la résistance du béton  $f_{ck}$ , avec les valeurs suivants :  $f_{yk} = 400$  MPa,  $1 \leq \rho \leq 5\%$  et  $0,25 \leq \rho'/\rho \leq 1$ . Dans le cas d'un béton ordinaire où  $f_{ck} \leq 50$  MPa et pour un groupe de 90 valeurs, les rapports d'erreurs sont tous dans l'intervalle [0,81 ; 1,20] sauf deux valeurs particulières de (1,26 et 1,27). Par ailleurs, pour le béton à haute résistance et un groupe de 170 valeurs, les rapports d'erreurs obtenus sont tous entre 0,90 et 1,14. D'autre part, la Figure 11(d) illustre les valeurs du rapport d'erreur en fonction de changement de  $f_{yk}$ . D'après cette figure, pour un groupe de 352 valeurs, les rapports d'erreurs sont tous entre 0,78 et 1,22 sauf une seule valeur égale à 1,26. Ces résultats montrent la fiabilité de l'Eq. (21) vis-à-vis de la résistance du béton  $f_{ck}$  et la limite élastique des aciers  $f_{yk}$ .

Dans le même contexte, la Fig. 11(b) montre le rapport ( $\mu_{\phi,prop} / \mu_{\phi,num}$ ) en fonction du pourcentage d'armatures tendues  $\rho$ . Le rapport d'erreur est calculé pour les pourcentages d'armatures tendues égale à 1, 2, 3, 4, et 5 % avec les résistances du béton 30, 50, 51 et 90 MPa et les limites élastique d'acier  $f_{yk}$  400, 500 et 600 MPa. Pour un groupe de 212 valeurs, le rapport ( $\mu_{\phi,prop} / \mu_{\phi,num}$ ) est compris

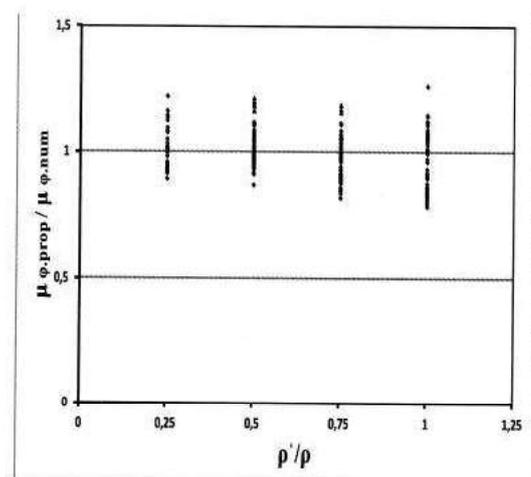
entre 0,78 et 1,26. En outre, Les rapports d'erreurs tracés en fonction du rapport  $\rho'/\rho$  dans la Figure 11(c) montrent que toutes les 212 valeurs sont comprises entre 0,78 et 1,26. En conséquence, la pertinence de la certitude de la formule proposée Eq. (21) reste valable avec la variation de  $\rho'/\rho$ .



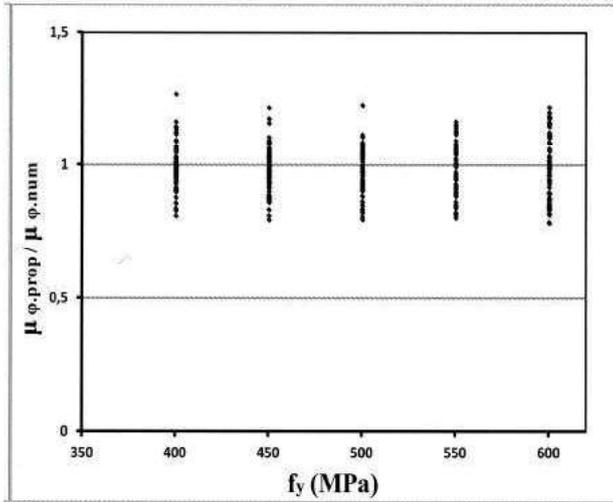
-a-



-b-



-c-

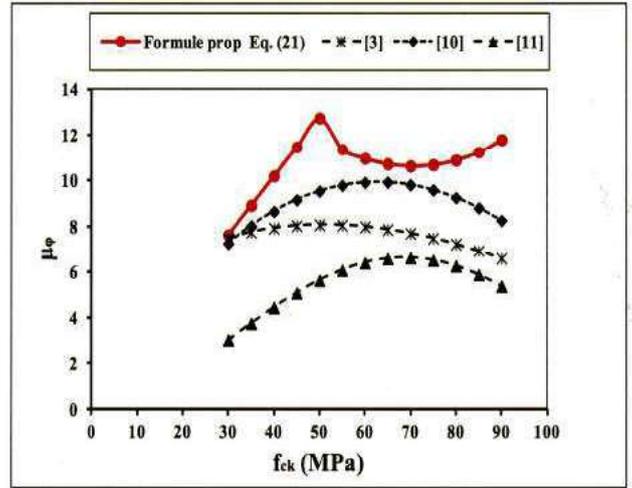


-d-

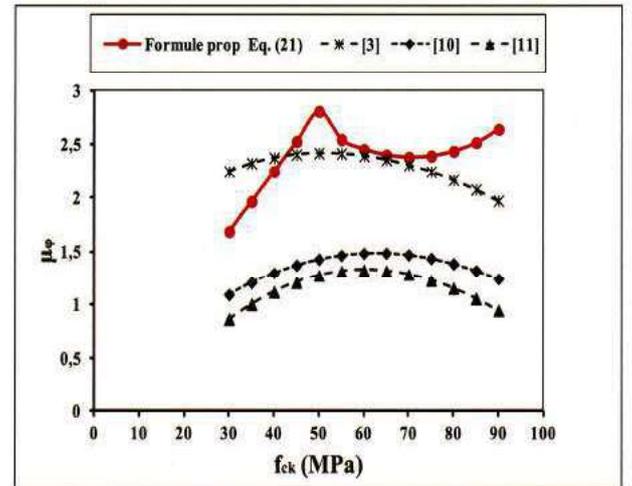
**Fig. 11. Comparaison entre la formule proposée Eq. (21) et les résultats numériques de l'Eurocode 2.**

**Fig. 11. Comparison between the proposed formula Eq. (21) and the numerical results of the Eurocode 2.**

Les Figures 12, 13 illustrent une comparaison entre la ductilité obtenue à partir de la formule proposée Eq. (21) et les autres prédictions de Pam et al. [3], Arslan et al. [10], et Lee [11]. La figure 12(a) montre une large tendance entre notre courbe et les autres courbes des différents chercheurs. Ce constat se retrouve dans la Figure 12 (b) lorsque  $\rho = 5\%$  où notre courbe converge largement avec celle proposée par Pam et al. [3]. Dans la Figure 13 (a), lorsque la limite élastique des armatures  $f_{yk}$  augmente à 600 MPa, on constate une nette superposition entre nos résultats et les autres travaux, même pour  $\rho = 5\%$  dans la Figure 13(b). En conséquence, la formule proposée Eq. (21) montre une large cohérence avec les autres travaux, et elle exprime explicitement tous les facteurs influent la ductilité en courbure dans les poutres en béton à haute résistance. Dans le même contexte, le tableau 1 dresse une comparaison avec les résultats obtenus à l'aide de la formule Eq. (21) et les travaux expérimentaux de (Bengar et al. [7], Maghsoudi et al. [8]) sur un ensemble des configurations de poutres. D'après ce tableau, les résultats obtenus à partir de l'Eq. (21) sont très acceptables comparativement avec celles obtenus expérimentalement ainsi que celui du code ACI et CSA.



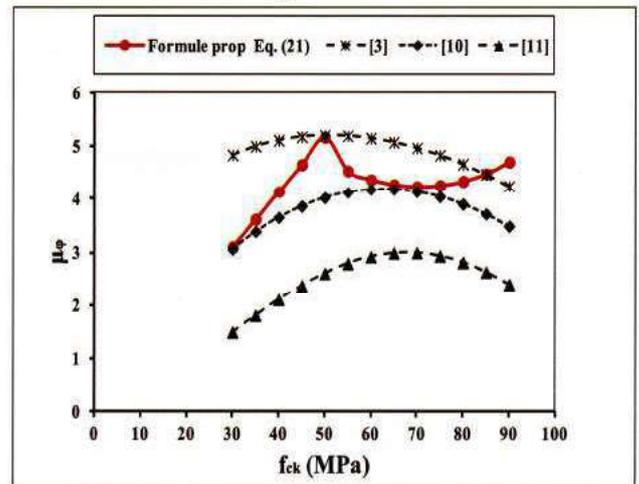
α)  $\rho = 1\%$



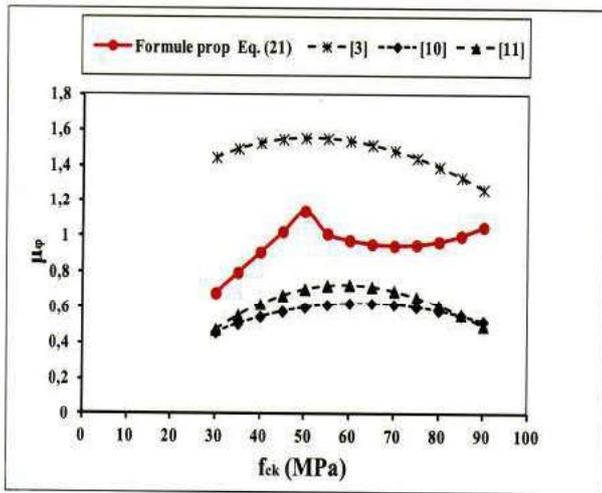
b)  $\rho = 5\%$

**Fig. 12. Comparaison entre la formule proposée Eq. (21) et autres prédictions de (Pam et al. [3], Arslan et al. [10], Lee [11]) ( $f_{yk} = 400$  MPa,  $\rho' / \rho = 0.5$ ).**

**Fig. 12. comparison between the proposed formula Eq. (21) and other predictions of (Pam et al [3], Arslan et al. [10], Lee [11]) ( $f_{yk} = 400$  MPa,  $\rho' / \rho = 0.5$ ).**



a)  $\rho = 1\%$



b)  $\rho = 5\%$

Fig. 13. Comparaison entre la formule proposée Eq. (21) et autres prédictions de (Pam *et al.* [3], Arslan *et al.* [10], Lee [11]) ( $f_{yk} = 600$  MPa,  $\rho' / \rho = 0.5$ ).

Fig. 13. comparison between the proposed formula Eq. (21) and other predictions of (Pam *et al.* [3], Arslan *et al.* [10], Lee [11]) ( $f_{yk} = 600$  MPa,  $\rho' / \rho = 0.5$ ).

Dans le même contexte, le tableau 1 dresse une comparaison avec les résultats obtenus à l'aide de notre formule Eq. (21) et les travaux expérimentaux de (Bengar *et al.* [7], Maghsoudi *et al.* [8]) sur un ensemble des configurations des poutres. D'après ce tableau, les résultats obtenus par notre proposition Eq. (21) sont très acceptables comparativement avec celles obtenus par l'expérimentation et celui du code ACI et CSA. En outre, la représentation graphique du tableau 1 dans la Fig. 14 confirme ce constat et montre une large cohérence entre nos résultats et les travaux expérimentaux [7,8].

Tableau 1 Comparaison entre la formule proposée Eq. (21) et les résultats expérimentaux de Bengar *et al.* [7], Maghsoudi *et al.* [8].

Table 1 comparison between the proposed formula Eq. (21) and experimental results of Bengar *et al.* [7], Maghsoudi *et al.* [8].

	N° poutre	$f_{ck}$ (MPa)	d (mm)	$d'$ (mm)	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$\rho'/\rho$	$f_{yk}$ (MPa)	Facteur de ductilité en courbure $\mu_p$			
									Expérimental	ACI	CSA	Eq. (21)
Maghsoudi <i>et al.</i> [8]	1	73.65	256	40	4.103	2.05	0.5	400	4.33	2.75	3.51	<b>2.86</b>
	2	66.81	266	40	4.773	2.39	0.5	400	-	2.07	2.65	<b>2.49</b>
	3	77.72	258	42	5.851	2.93	0.5	400	3.38	1.76	2.18	<b>2.08</b>
Bengar <i>et al.</i> [7]	4	56.31	254	42	0.61	0.61	1	398	11.84	9.89	11.91	<b>16.96</b>
	5	69.5	254	42	0.61	0.61	1	398	10.25	19.13	23.98	<b>16.04</b>
	6	63.48	250	47	1.25	0.61	0.488	401	6.84	6.68	8.13	<b>8.68</b>
	7	70.5	250	47	1.25	0.61	0.488	401	5.38	8.22	10.31	<b>8.57</b>
	8	63.21	251	42	2.03	1.01	0.4975	373	5.75	5.53	6.87	<b>6.53</b>
	9	70.8	251	42	2.03	1.01	0.4975	373	4.52	5.34	6.65	<b>6.43</b>
	10	71.45	250	47	2.51	1.24	0.494	401	5.6	4.75	5.87	<b>4.47</b>
	11	72.8	230	47	2.51	1.24	0.494	401	2.82	3.64	4.48	<b>4.48</b>

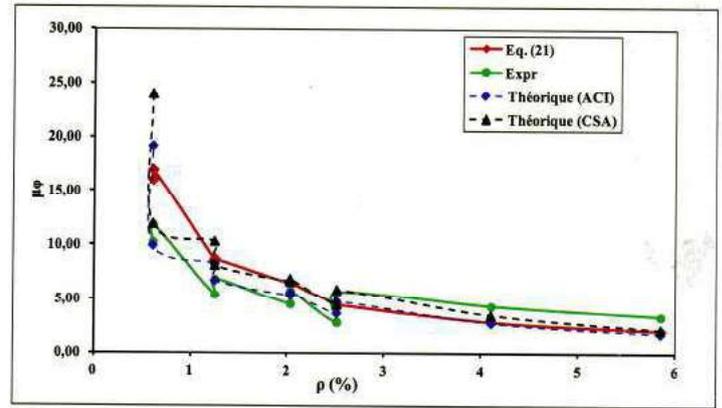


Fig. 14. Comparaison des résultats obtenus par Eq. (21) avec d'autres résultats expérimentaux [7,8].

Fig. 14. comparison between the results obtained by Eq. (21) and experimental results [7,8].

## 7. CONCLUSION

L'étude présentée dans cet article a traité principalement les paramètres affectant la ductilité en courbure dans les poutres en béton à haute résistance (BHP) dimensionnée selon l'Eurocode 2. Les résultats issus de cette étude ainsi que celles recueillies de la bibliographie, ont fourni les données nécessaires pour la proposition d'une nouvelle formule simplifiée en fonction de la résistance du béton  $f_{ck}$ , la limite élastique des aciers  $f_{yk}$  ainsi que le rapport des pourcentages d'armatures tendues et comprimées. La formule proposée est valable pour des poutres avec un béton non confiné ayant une résistance de béton  $f_{ck}$  de 30 à 90 MPa, une limite élastique des aciers  $f_{yk}$  de 400 à 600 MPa, un pourcentage d'armatures tendues  $\rho$  de 1 à 5% et un rapport des armatures comprimées  $\rho'$  de 0.25 jusqu'à la valeur des armatures tendues  $\rho$ .

La formule proposée pour les cas pratiques permet aux concepteurs de choisir des configurations de poutres pour un facteur de ductilité en courbure disponible sélectionné initialement et, par conséquent, constitue un bon contrôle de l'endommagement des poutres en BHP durant un séisme majeur.

## Références bibliographiques

- [1] Eurocode 2., Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, prEN 1992-1-1:2003 E., Brussels, 2003.
- [2] Eurocode 8., Design Provisions for Earthquake Resistance of Structures, Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Building., EN 1998-1, Brussels, 2004.
- [3] Pam, H.J., Kwan, A.K.H., and Islam, M.S., Flexural Strength and Ductility of Reinforced Normal-and High-Strength Concrete Beams., Proceedings of the ICE-Structures and Buildings, Vol. 146, No. 4, pp. 381-389, 2001.
- [4] Pam, H.J., Kwan, A.K.H., and Ho, J.C.M., Post-Peak Behavior and Flexural Ductility of Doubly Reinforced High-Strength Concrete Beams., Structural Engineering and Mechanics., Vol. 12, No. 5, pp. 459-74, 2001.
- [5] American Concrete Institute (ACI)., Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-08) and Commentary., Farmington Hills, Detroit, USA, 2008.
- [6] Kwan, A.K.H., and Ho, J.C.M., Flexural strength and ductility of reinforced concrete beams., The University of Hong Kong, Structures And Buildings, Vol. 152, No. 4, pp. 361-369, 2002.
- [7] Bengar, H.A. and Maghsoudi, A.A., Flexural ductility of HSC members., Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering, Vol. 31, No. B2, pp. 209-223, 2007.
- [8] Maghsoudi, A.A., and Sharifi, Y., Ductility of High Strength Concrete Heavily Steel Reinforced Members, Scientia Iranica, Transaction A: Civil Engineering, Vol. 16, No. 4, pp. 297, 2009.
- [9] Canadian Standards Association (CSA)., Design of concrete structures for building (CAN3-A23.3-94)., Ontario, Canada, 199, 1994.
- [10] Arslan, G. and Ercan, C., Curvature ductility prediction of reinforced high strength concrete beam sections., Journal of Civil Engineering and Management, Vol. 16, No. 4, pp. 462-470, 2010.
- [11] Lee, Hyung Joon., Predictions of Curvature Ductility Factor of Reinforced Concrete Beam Sections Used High Strength Concrete and Steel, Journal of the Korean Society of Civil Engineer, Vol. 33, No. 2, pp. 483-493, March 2013.
- [12] Park, R., and Ruitong, D., Ductility of Doubly Reinforced Beam sections., ACI Structural Journal, Title No 85-S24, March-April 1988.
- [13] Kassoul, A. and Bougara, A., Maximum ratio of longitudinal tensile reinforcement in high strength doubly reinforced concrete beams designed according to Eurocode 8., Engineering Structures, Vol. 32, pp. 3206-3213, 2010.